

六角形几何积分输运变分节块法及加速方法研究

殷 晗¹ 张 斌² 刘晓晶¹ 张腾飞¹

1(上海交通大学 核科学与工程学院 上海 200240)

2(中国核动力研究设计院 核反应堆系统设计技术重点实验室 成都 610213)

摘要 精确高效的中子学计算方法是快堆概念设计和方案优化的必备条件。本研究提出一种积分形式的变分节块法以求解六角形节块几何下的三维多群中子输运方程。该方法采用积分方法处理节块内部中子角通量密度,采用偶宇称球谐函数处理节块表面中子角通量密度,同时采用准反射边界条件方法减少节块表面的角度自由度数目,以节省计算成本。针对 TAKEDA-4 基准题的验证结果表明:相比于传统基于球谐函数离散化的变分节块法,本方法在低阶角度近似下可将特征值计算偏差降低 2~5 倍;在高阶角度近似如 P_7 近似下,加速算法能够实现 33 倍的加速比。研究建立的积分中子输运变分节块法可用于六角形组件几何快堆的高效、精确模拟。

关键词 变分节块法, 六角形几何, 积分方法, 准反射边界条件

中图分类号 TL99

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2020.hjs.43.060008

Study on hexagonal integral variational nodal method and acceleration method

YIN Han¹ ZHANG Bin² LIU Xiaojing¹ ZHANG Tengfei¹

1(School of Nuclear Science and Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

2(Science and Technology on Reactor System Design Technology Laboratory, Nuclear Power Institute of China, Chengdu 610213, China)

Abstract [Background] Accurate and efficient neutron calculation method is a prerequisite for fast reactor conceptual design and scheme optimization. [Purpose] The study aims to propose an integral form of variational nodal method to solve the three-dimensional multi-group neutron transport equation with hexagonal geometry. [Methods] The integral method was used to deal with the angular flux within hexagonal nodes while angular flux distributions on nodal interfaces are approximated by even-parity spherical harmonics. Besides, the quasi-reflected interface condition (QRIC) method was employed to reduce the number of interfacial angular terms to save computational costs. Finally, the TAKEDA-4 benchmark was taken for evaluation. [Results] The calculation results of TAKEDA-4 benchmark show that, compared with low angular order approximations, the integral method exhibits superior accuracy than the standard variational node method based on spherical harmonic discretization, and reduces the errors by 2~5 times in eigenvalue. In addition, the joint performance of the integral method and the QRIC method yields a remarkable computational time gain of 33.0 with the P_7 angular approximation. [Conclusions] The integral

国家自然科学基金青年项目(No.11805122)、国家自然科学基金优秀项目(No.11922505)资助

第一作者: 殷晗, 男, 1995 年出生, 2018 年毕业于兰州大学, 现为硕士研究生, 研究领域为反应堆物理数值计算方法

通信作者: 张腾飞, E-mail: zhangtengfei@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2020-02-25, 修回日期: 2020-04-24

Supported by Youth Program of National Natural Science Foundation of China (No.11805122), Excellent Youth Program of National Natural Science Foundation of China (No.11922505)

First author: YIN Han, male, born in 1995, graduated from Lanzhou University in 2018, master student, focusing on study of reactor physical numerical calculation method

Corresponding author: ZHANG Tengfei, E-mail: zhangtengfei@sjtu.edu.cn

Received date: 2020-02-25, revised date: 2020-04-24

variational node method presented in this paper realizes accurate and efficient simulation of fast reactor in hexagonal geometry.

Key words Variational nodal method, Hexagonal geometry, Integral method, Quasi-reflected interface condition

在新型反应堆概念设计中,快中子反应堆因具有裂变材料增殖和高放废物嬗变等优势成为各国的研究重点。然而,适用于热堆的中子物理计算方法大多基于矩形几何组件,无法处理六角形快堆组件;另一方面,快中子更长的平均自由程导致快堆计算需要采用高阶输运方法以处理快堆的强角度各向异性和强泄漏问题,因此,精确高效的中子学计算方法成为了快堆概念设计和方案优化的必备条件^[1]。

变分节块法^[2] (Variational Nodal Method, VNM)作为一种典型的中子输运算法,最早在VARIANT程序中实现,并广泛用于快堆物理计算^[3]。VNM从二阶偶宇称形式的中子输运方程出发,在问题求解域建立包含二阶中子输运方程和自然边界条件的泛函,并利用变分原理对空间项和角度项进行离散,通过分别求解各个节块内的响应矩阵方程,最终得到问题域内的中子通量密度分布。近年来,VNM已成功应用于ERANOS^[4]、VIOLET^[5]、PANX^[6]等多种中子计算程序中。

然而,传统的变分节块法在角度离散上通常采用球谐函数展开法(P_N)^[7],随着角度展开阶数的增加,总的自由度数目和响应矩阵的规模将迅速增大,带来巨大的内存占用和时间消耗。因此,针对VNM的加速技术得到广泛研究,发展出了矩阵分离算法^[2]、积分方法^[8]和准反射边界条件(Quasi-Reflected Interface Condition, QRIC)^[9]等一系列加速方法。

在之前的工作中^[10],积分方法被成功应用于三维均匀矩形节块问题中,并被证明可有效提升响应矩阵的构造效率。然而,其仅能处理矩形节块问题,而不具备处理六角形节块的能力,因此不满足六角形组件几何快堆模拟的需要;另外,快堆的高阶输运模拟带来大量的表面角度自由度,这对程序的计算效率提出了严峻挑战,必须采用有效的加速方法以高效求解矩阵方程。在众多加速方法中,QRIC方法对高阶角度项采用反射边界条件,从而可以实现减小节块表面角度项的目的。因此,QRIC方法在求解包含大量表面角度项的矩阵方程上有天然的优势。目前QRIC方法在求解压水堆问题上有效实现了加速,但是其处理具有更强角度各向异性的快堆问题的可行性还有待进一步验证。

基于上述两点,本文对积分方法进行了进一步研究,将其应用于六角形组件反应堆中,并采用

QRIC方法对求解过程进行加速。通过对TAKEDA-4基准题的计算,验证了该方法高效求解六角形组件几何快堆问题的可行性。

1 理论模型

通过变分方法,建立包含二阶中子输运方程和自然边界条件的节块泛函^[11]:

$$F_v[\psi^+, \omega] = \int_v dV \left\{ \int d\Omega [\Sigma_t^{-1} (\Omega \cdot \nabla \psi^+)^2 + \Sigma_t \psi^{+2}] - \Sigma_s \phi^2 - 2\phi q \right\} + 2 \int_{\partial s} dS \int d\Omega \psi^+ \omega \quad (1)$$

式中: F_v 为单个节块内部的泛函; ψ^+ 为偶阶中子角通量密度; ϕ 为中子标通量密度; q 为中子源项; Σ_t 为中子总截面; Σ_s 为宏观散射截面; Ω 为方位角向量。值得注意的是,与原有积分形式变分节块法^[10]的泛函形式不同,此处引入 $\omega = n_u \cdot \Omega \psi^-$ 这一偶宇称变量,避免了处理周期性边界条件时复杂的表面坐标系旋转操作。

节块内部的偶宇称中子角通量密度的离散形式^[10]为:

$$\psi^+(r, \Omega) \approx f^T(x, y, z) \psi(\Omega) \quad (2)$$

式中: $f(x, y, z)$ 为正交多项式向量,满足 $\int f(x, y, z) f^T(x, y, z) dV = I_v$,其中 I_v 为对角矩阵,对角项为节块体积,需要注意的是,对于六角形反应堆,正交多项式构造的Gramm-Schmidt过程是在六角形节块上进行,而非矩形节块^[10]。 $\psi(\Omega)$ 一节块内部角度相关的中子角通量密度矩向量,满足关系式 $\phi = \int d\Omega \psi(\Omega)$ 。

节块表面偶宇称中子角通量密度离散形式为:

$$\omega_\gamma(r, \Omega) \approx Y_{\gamma\gamma}^T(\Omega) \otimes f(x, y, z) \Big|_{\partial s}^T \omega_\gamma \quad (3)$$

式中: $Y_{\gamma\gamma}(\Omega)$ 为 γ 面上的偶宇称球谐函数向量; ω_γ 为 γ 面上的偶宇称中子角通量密度矩向量。

将式(2)、(3)代入式(1)中得到泛函的离散形式:

$$F[\psi, \omega_\gamma] = \int d\Omega \psi^T(\Omega) A(\Omega) \psi(\Omega) - \Sigma_s \phi^T I_v \phi - 2\phi^T I_v q + 2 \sum_\gamma \int d\Omega \psi^T(\Omega) E_\gamma(\Omega) \omega_\gamma \quad (4)$$

相关的系数矩阵的具体表达式为:

$$\begin{aligned}
A(\Omega) &= \sum_{ij=x,y,z} \Omega_i \Omega_j P_{ij} + \Sigma_t I_V \\
E_\gamma(\Omega) &= Y_{+\gamma}^T(\Omega) \otimes D_\gamma \\
P_{ij} &= \int dV \Sigma_t^{-1} (\nabla_i f) (\nabla_j f^T) \quad i,j=x,y,z \\
D_\gamma &= \int dS f^T f|_\gamma \quad \gamma = \pm x, \pm y, \pm z \\
H &= \int d\Omega A(\Omega)^{-1} \\
M &= \int d\Omega A(\Omega)^{-1} E(\Omega) \\
L &= \int d\Omega E^T(\Omega) A(\Omega)^{-1} E(\Omega) \\
U &= M^T [I + \Sigma_s I_V Z^{-1} H] I_V \\
G &= [L + \Sigma_s I_V M^T Z^{-1} M] \\
V &= Z^{-1} H I_V \\
C &= Z^{-1} M \\
Z &= I - \Sigma_s I_V H
\end{aligned}$$

为了提高矩阵方程的求解速度,本文采用了准反射边界条件(Quasi-Reflected Interface Condition, QRIC)加速技术^[9]。QRIC方法的思想在于:通过将反射边界条件作用于节块表面的高阶角度项,以减少节块表面的角度相关自由度数,将响应矩阵的规模减小至与低阶角度近似的水平,从而提高求解速度。

为推导QRIC方法的加速原理,将式(3)重写为:

$$\begin{aligned}
\omega(r, \Omega) &\approx Y_{+\gamma l}^T(\Omega) \otimes f(x, y, z) \Big|_{\partial s}^T \omega_l + \\
&Y_{+\gamma h}^T(\Omega) \otimes f(x, y, z) \Big|_{\partial s}^T \omega_h
\end{aligned} \quad (5)$$

式中: $Y_{+\gamma l}(\Omega)$ 为低阶偶宇称球谐函数向量; $Y_{+\gamma h}(\Omega)$ 为高阶偶宇称球谐函数向量; ω_l 为低阶矩向量; ω_h 为高阶矩向量。

对于高阶项,采用反射边界条件处理,即令高阶球谐函数向量中的奇数 m 项为零,只保留偶数 m 项,处理后的高阶角度项用下标 e 表示。将式(2)、式(5)代入式(1)中,得到离散泛函:

$$\begin{aligned}
F[\psi, \omega_{\gamma l}, \omega_{\gamma e}] &= \int d\Omega \psi^T(\Omega) A(\Omega) \psi(\Omega) - \\
&\Sigma_s \phi^T I_V \phi - 2\phi^T I_V q + 2 \sum_\gamma \int d\Omega \psi^T(\Omega) [E_{\gamma l}(\Omega) \omega_{\gamma l} + \\
&E_{\gamma e}(\Omega) \omega_{\gamma e}]
\end{aligned} \quad (6)$$

令方程(6)关于 $\omega_{\gamma l}$ 和 $\omega_{\gamma e}$ 的一阶变分为零,可得下面两个量在节块表面的连续性条件:

$$\phi_l = \int d\Omega E_l^T(\Omega) \psi(\Omega) \quad (7)$$

$$\phi_e = \int d\Omega E_e^T(\Omega) \psi(\Omega) \quad (8)$$

采用反射边界条件,令 $\phi_e = 0$, 得到:

$$\phi_l = \tilde{U} q_l - \tilde{G} \omega_l \quad (9)$$

$$\phi = \tilde{V} q_l - \tilde{C} \omega_l \quad (10)$$

准反射边界条件对应的系数矩阵为:

$$\begin{aligned}
E_{\gamma i}(\Omega) &= Y_{+\gamma i}^T(\Omega) \otimes D_\gamma \quad i = l, e \\
C_i &= Z^{-1} M_i \quad M_i = \int d\Omega A(\Omega)^{-1} E_i(\Omega) \quad i = l, e \\
L_{ij} &= \int d\Omega E_i^T(\Omega) A(\Omega)^{-1} E_j(\Omega) \quad i, j = l, e \\
U_i &= M_i^T [I + \Sigma_s I_V Z^{-1} H] I_V \quad i, j = l, e \\
G_{ij} &= [L_{ij} + \Sigma_s I_V M_i^T Z^{-1} M_j] \quad i, j = l, e \\
\tilde{U} &= U_l - G_{le} G_{ee}^{-1} U_e \\
\tilde{G} &= G_{ll} - G_{le} G_{ee}^{-1} G_{el} \\
\tilde{V} &= V_l - C_e G_{ee}^{-1} U_e \\
\tilde{C} &= C_l - C_e G_{ee}^{-1} G_{el}
\end{aligned}$$

2 数值结果

基于上述理论模型,本研究在中子输运计算程序 VITAS^[10] 的基础上开发了具备六角形节块处理能力的新版 VITAS 程序。

新版 VITAS 在原有程序基础上增加了六角形节块输运模型,使其不仅能处理矩形节块,同时能够处理六角形节块,以满足六角形几何快堆模拟的要求;另一方面,新版 VITAS 在原有广义矩阵分离(Generalized Partitioned Matrix)加速算法^[10] 的基础上引入了 QRIC 加速算法,减少了表面角度项的数目,从而提高了程序的求解效率。

本文采用 TAKEDA-4 六角形组件基准题^[12] 对新版 VITAS 程序进行了验证。该基准题模型是基于 KNK-II 反应堆堆芯建立,其堆芯径向分布和轴向布置分别如图 1、2 所示。整个堆芯由 8 圈六角形组件构成,堆芯总高度为 190 cm(包含轴向反射层),每个六角形组件的边长为 7.5 cm。计算考虑三种不同的控制棒棒位情况:控制棒拔出(CR Out);控制棒半插(CR Half);控制棒全插(CR In)。

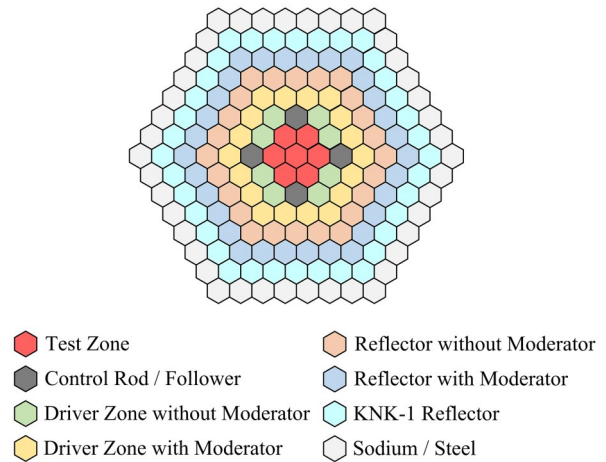


图 1 TAKEDA-4 基准题的组件径向分布
Fig.1 The assembly radial layout of the TAKEDA-4 benchmark

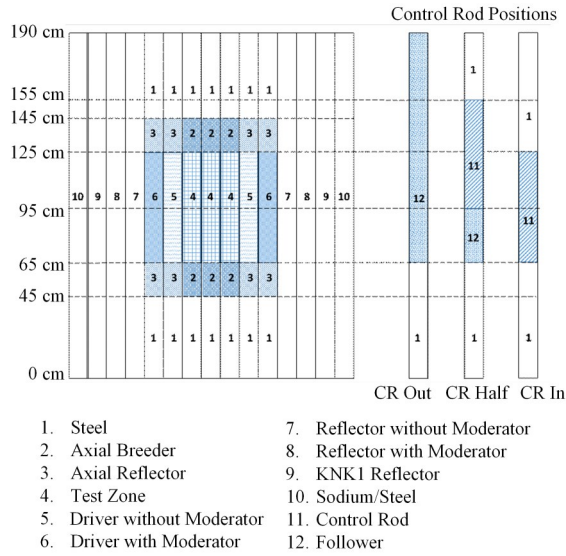


图2 TAKEDA-4基准题的组件轴向分布
Fig.2 The assembly axial layout of the TAKEDA-4 benchmark

通过对空间展开阶数的敏感性分析,最终确定中子角通量密度的空间离散在节块内部采用7阶正交多项式,在节块表面采用2阶正交多项式,继续增大阶数,对计算精度不会有提升。

表1给出了标准 P_N 法和积分方法在不同控制棒插入情况、不同 P_N 阶数的特征值计算偏差,并由此绘制特征值计算偏差随 P_N 阶数的变化图,如图3所示。

表1 标准 P_N 法和积分方法的特征值计算偏差对比
Table 1 Eigenvalue error comparisons of the standard method and the integral method

		P_1	P_3	P_5	P_7
控制棒拔出 CR out	积分方法 Integral method	1.099 17	1.096 12	1.095 63	1.095 49
	偏差 Error / 10^{-5}	372	93	48	36
	标准 P_N 法 Standard method	1.073 42	1.093 03	1.094 52	1.094 99
	偏差 Error / 10^{-5}	-1 980	-189	-53	-10
控制棒半插 CR half	积分方法 Integral method	0.989 05	0.984 62	0.984 01	0.983 86
	偏差 Error / 10^{-5}	584	135	73	56
	标准 P_N 法 Standard method	0.958 17	0.980 82	0.982 79	0.983 35
	偏差 Error / 10^{-5}	-2556	-252	-52	5
控制棒全插 CR in	积分方法 Integral method	0.885 78	0.880 99	0.880 32	0.880 18
	偏差 Error / 10^{-5}	668	124	48	31
	标准 P_N 法 Standard method	0.852 38	0.876 76	0.879 11	0.879 71
	偏差 Error / 10^{-5}	-3 128	-357	-90	-22

表2给出了控制棒拔出情况下标准 P_N 法和积分方法计算的中子通量密度的百分偏差对比。结果表明:1)两种方法得到的中子通量密度计算偏差均随展开阶数的增大而减小,以轴向增殖层1群为例,当 P_N 阶数由 P_1 增加到 P_3 ,积分方法中子通量密度的百分偏差由-2.41%减小为-0.58%,标准 P_N 法的百分偏差由7.67%减小为0.74%,计算精度有明显提高,这

示,参考解采用 Monte Carlo 方法计算得到^[12]。计算结果表明:1)两种方法的特征值计算偏差随 P_N 阶数的增大呈现相反方向的渐进收敛势,这主要是由于二者在节块内部的角度处理方式不同导致的;2)低阶角度近似情况下,积分方法具有更高的计算精度。 P_1 近似下,积分方法可将特征值的计算偏差降低5倍左右, P_3 近似下,可将特征值的计算偏差降低两倍以上;3)相比标准 P_N 法,积分方法随着角度阶数的增加可以更快地达到渐进收敛。研究表明:不同控制棒位下的计算精度和计算效率呈现相同的趋势,因此为简洁起见,后文中的分析仅以控制棒拔出情况为例。

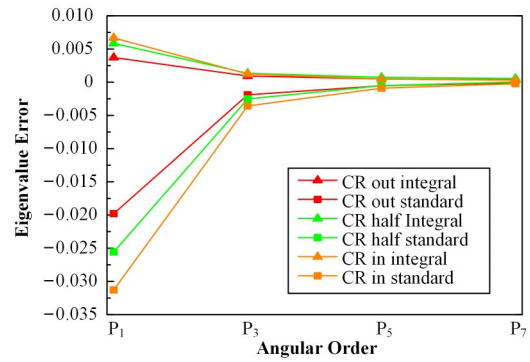


图3 特征值计算偏差随角度阶数的变化
Fig.3 Variation of calculation errors of eigenvalue with angular order

说明低阶角度近似在处理快堆中子长自由程和强泄漏方面存在明显不足;2)低阶角度近似下,相比于标准 P_N 法,积分方法可将中子通量密度的百分偏差减少约2%,提高了中子通量密度的计算精度。

TAKEDA-4控制棒拔出情况下积分方法和标准 P_N 方法的CPU时间随角度展开阶数的变化情况如图4所示,其中Total、RM、Solve分别表示总时间、响

表2 控制棒拔出情况下积分方法和标准法的中子通量密度计算偏差对比
Table 2 Comparisons of flux errors between the integral method and the standard method for the CR out case

		积分方法 Integral method				标准 P_N 法 Standard method			
		P_1	P_3	P_5	P_7	P_1	P_3	P_5	P_7
轴向增殖层 Axial breeder	1G	-2.81	-0.08	0.24	0.36	9.79	1.91	0.96	0.67
	2G	-1.05	-0.10	0.01	0.03	3.58	0.54	0.20	0.11
	3G	-1.02	-0.42	-0.34	-0.32	1.98	0.05	-0.19	-0.26
	4G	-0.93	-0.53	-0.47	-0.45	1.64	-0.18	-0.34	-0.39
试验区 Test zone	1G	1.16	0.57	0.49	0.46	-2.87	0.06	0.29	0.37
	2G	-0.32	-0.41	-0.41	-0.41	-2.98	-0.53	-0.46	-0.44
	3G	-0.18	0.01	0.04	0.05	-0.12	0.15	0.09	0.06
	4G	0.05	0.30	0.35	0.37	2.94	0.66	0.51	0.44
无慢化剂驱动区 Driver zone without moderator	1G	0.86	0.11	-0.07	-0.12	-1.84	-0.79	-0.43	-0.27
	2G	0.20	-0.02	-0.05	-0.06	-1.43	-0.30	-0.14	-0.09
	3G	-1.02	-0.56	-0.50	-0.48	1.59	-0.11	-0.35	-0.42
	4G	-1.10	-0.07	0.04	0.08	6.23	1.00	0.40	0.23
跟随体 Follower	1G	-3.11	-0.92	-0.49	-0.38	4.34	1.21	0.23	-0.10
	2G	-0.39	0.04	0.10	0.12	0.84	0.32	0.18	0.14
	3G	-0.53	-0.23	-0.19	-0.17	0.69	0.03	-0.09	-0.13
	4G	-0.54	-0.48	-0.45	-0.44	-0.55	-0.39	-0.39	-0.40

应矩阵构造时间和矩阵方程求解时间。此处将标准 P_7 计算的 CPU 时间作为基准值并归一。图 4 表明：1) 标准 P_N 法在阶数增大时要付出更大的时间代价，当 P_N 阶数由 P_5 增加到 P_7 ，积分方法的计算时间由 0.04 增加到 0.20，而标准 P_N 法的总时间由 0.12 增加到 1.00；2) 标准 P_N 法的求解时间更短，这得益于其较少的表面角度自由度数目。然而，这并不足以抵消其矩阵构造过程中巨大的时间开销，因此从总 CPU 时间来看，积分方法的计算效率更高，在高阶角度近似如 P_7 近似下，积分方法相比标准 P_N 法具有 5.0 的加速比。为验证准反射边界条件方法的加速效果，对积分方法表面全阶数 P_N 处理（‘Full’表示）和表面准反射边界条件处理（‘QRIC’表示）在不同 P_N 阶数下的计算时间进行了比较，如图 5 所示。图中 QRIC- P_3 处理是指把角度项保留至 P_3 ，高于 P_3 的角度项采用反射边界条件处理。另外，为便于比较，此处将表面全阶数 P_9 处理的构造时间作为基准值并归一，图 5 结果表明，在 P_9 近似下，QRIC 加速算法能够提升 75% 的构造速度，75% 的求解速度，总加速比为 6.7。

同时，本研究针对 QRIC 加速算法对计算精度的影响进行了分析，包括特征值的计算和中子通量密度的计算，计算结果见图 5 和表 3。计算结果显示：采用 QRIC 加速算法所造成的特征值计算精度的损失小于 0.000 12，中子通量密度计算精度的损失小于 0.1%。因此，认为采用 QRIC 加速算法对计算精度的影响可以忽略。

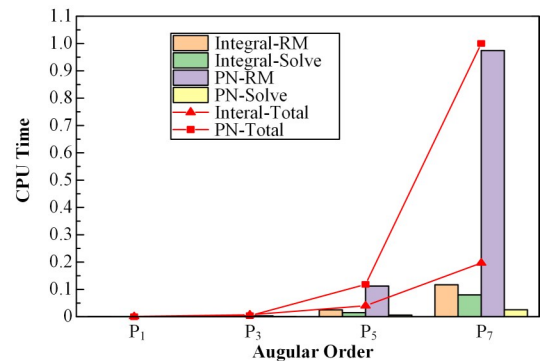


图 4 TAKEDA-4 基准题控制棒拔出情况下 CPU 时间随角度展开阶数的变化

Fig.4 Variation of CPU time with degree of angular orders for the TAKEDA-4 benchmark CR Out case

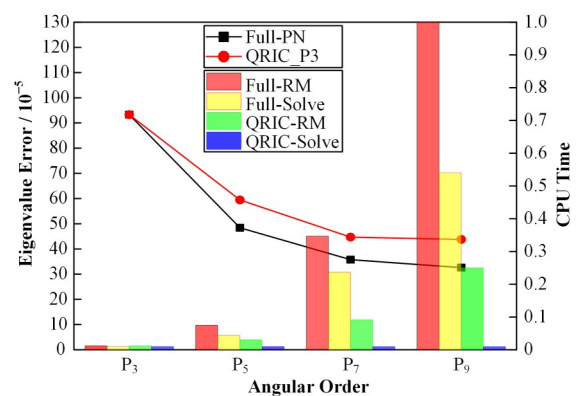


图 5 全角度处理和准反射边界条件处理效率-精度对比
Fig.5 Cost-accuracy trade-off comparisons between the full angular treatment and the quasi-reflected interface condition

表3 控制棒全插情况下全角度处理和准反射边界条件处理的中子通量密度百分偏差对比
Table 3 Comparisons of neutron flux percentage errors between the full angular treatment and the quasi-reflected interface condition for the CR in case

		Full				QRIC_P3			
		P ₃	P ₅	P ₇	P ₉	P ₃	P ₅	P ₇	P ₉
轴向增殖层 Axial breeder	1G	-0.58	-0.41	-0.33	-0.32	-0.58	-0.48	-0.39	-0.37
	2G	0.60	0.64	0.65	0.65	0.60	0.62	0.63	0.64
	3G	-0.28	-0.25	-0.25	-0.25	-0.28	-0.26	-0.26	-0.24
	4G	-0.58	-0.55	-0.55	-0.55	-0.58	-0.56	-0.56	-0.54
试验区 Test zone	1G	-0.26	-0.33	-0.35	-0.35	-0.26	-0.31	-0.33	-0.33
	2G	-0.23	-0.24	-0.23	-0.23	-0.23	-0.23	-0.21	-0.21
	3G	-0.24	-0.23	-0.22	-0.22	-0.24	-0.23	-0.22	-0.21
	4G	-1.47	-1.45	-1.45	-1.45	-1.47	-1.49	-1.48	-1.47
无慢化剂驱动区 Driver zone without moderator	1G	0.14	-0.01	-0.05	-0.07	0.14	-0.01	-0.07	-0.08
	2G	0.13	0.11	0.11	0.11	0.13	0.11	0.10	0.10
	3G	0.03	0.07	0.08	0.09	0.03	0.07	0.09	0.10
	4G	0.17	0.24	0.25	0.25	0.17	0.24	0.26	0.27
跟随体 Follower	1G	-0.79	-0.29	-0.18	-0.16	-0.79	-0.37	-0.22	-0.20
	2G	-0.11	0.05	0.08	0.09	-0.11	0.03	0.07	0.08
	3G	0.12	0.21	0.23	0.24	0.12	0.21	0.25	0.25
	4G	-0.15	-0.07	-0.04	-0.04	-0.15	-0.03	0.00	0.01

3 结语

本文对积分形式的变分节块法^[10]进行了进一步研究和改进,提出一种可用于六角形组件几何快堆模拟的积分输运变分节块法。在中子角通量密度的角度处理上,采用积分方法处理节块内部的中子角通量密度,采用偶宇称球谐函数处理节块表面的中子角通量密度,同时采用 QRIC 加速算法以提高计算效率。针对 TAKEDA-4 基准题的验证结果表明:

1)在低阶角度近似下,相比于传统基于球谐函数离散的变分节块法,本方法所采用的积分方法可提高特征值和中子通量密度的计算精度,使特征值的计算偏差降低 2~5 倍,中子通量密度计算的百分偏差减少约 2%。

2)在高阶角度近似下,积分方法和 QRIC 加速算法的共同作用能够显著提高计算效率。在 P₇近似下,积分方法和 QRIC_P₃加速算法分别具有 5.0 和 6.6 的加速比,相比于传统变分节块法,本方法可实现 33 倍的加速比。

参考文献

1 邓力, 史敦服, 李刚. 高保真计算多物理耦合关键技术[J]. 计算物理, 2016, **33**(6): 631–638. DOI: 10.3969/j.issn.1001-246X.2016.06.002.
DENG Li, SHI Dunfu, LI Gang. Key technology of multi physical coupling in high fidelity computing[J].

Computational Physics, 2016, **33**(6): 631–638. DOI: 10.3969/j.issn.1001-246X.2016.06.002.
2 Carrico C B, Lewis E E, Palmiotti G. Three-dimensional variational nodal transport methods for Cartesian, triangular, and hexagonal criticality calculations[J]. Nuclear Science and Engineering, 1992, **111**(2): 168–179. DOI: 10.13182/NSE92-1.
3 Smith M A, Lewis E E, Shemon E R. DIF3D-VARIANT 11.0: a decade of updates[M]. United States: N, 2014.
4 Allen K, Knight T, Bays S. Benchmark of advanced burner test reactor model using MCNPX 2.6.0 and ERANOS 2.1[J]. Progress in Nuclear Energy, 2011, **53**(6): 633–644. DOI: 10.1016/j.pnucene.2011.01.007.
5 王永平, 吴宏春, 李云召. 变分节块法求解中子扩散方程[J]. 现代应用物理, 2014, **5**(3): 174–176, 181. DOI: 10.3969/j.issn.2095-6223.2014.03.002.
WANG Yongping, WU Hongchun, LI Yunzhao. Variational nodal method for solving neutron diffusion equations[J]. Modern Applied Physics, 2014, **5**(3): 174–176, 181. DOI: 10.3969/j.issn.2095-6223.2014.03.002.
6 张腾飞, 吴宏春, 曹良志, 等. 中子扩散三维非均匀变分节块法及平源加速方法研究[J]. 核动力工程, 2018, **39**(2): 86–89. DOI: 10.13832/j.jnpe.2018.02.0086.
ZHANG Tengfei, WU Hongchun, CAO Liangzhi, et al. Study on three-dimensional neutron diffusion heterogeneous variational nodal method and flat source

- acceleration method[J]. Nuclear Power Engineering, 2018, **39**(2): 86–89. DOI: 10.13832/j.jnpe.2018.02.0086.
- 7 Lewis E E, Carrico C B, Palmiotti G. Variational nodal formulation for the spherical harmonics equations[J]. Nuclear Science and Engineering, 1996, **122**(2): 194–203. DOI: 10.13182/nse96-1.
- 8 Smith M A, Palmiotti G, Lewis E E, *et al.* An integral form of the variational nodal method[J]. Nuclear Science and Engineering, 2004, **146**(2): 141–151. DOI: 10.13182/nse146-141.
- 9 Lewis E E, Smith M A, Palmiotti G. A new paradigm for local-global coupling in whole-core neutron transport[J]. Nuclear Science and Engineering, 2009, **161**(3): 279–288. DOI: 10.13182/nse161-279.
- 10 Zhang T, Wu H, Cao L, *et al.* An improved variational nodal method for the solution of the three dimensional steady-state multi-group neutron transport equation[J]. Nuclear Engineering and Design, 2018, **337**: 419–427. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2018.07.009.
- 11 Lewis E E, Miller W F. Computational methods of neutron transport[M]. New York: Wiley, 1984.
- 12 Takeda T, Ikeda H. 3-D Neutron Transport Benchmark[J]. Journal of Nuclear Science and Technology, 1991, **28**(7): 656–669.